

Zadatak 19. Ako je S_n zbroj prvih n članova aritmetičkog niza, tada je:

$$1) \frac{S_m - S_n}{S_{m+n}} = \frac{m - n}{m + n};$$

$$2) S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2.$$

Dokaži!

Rješenje.

1)

$$\begin{aligned} \frac{S_m - S_n}{S_{m+n}} &= \frac{\frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) - \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)}{\frac{m+n}{2}(2a_1 + (m+n-1)d)} \\ &= \frac{2ma_1 + m(m-1)d - 2na_1 - n(n-1)d}{2(m+n)a_1 + (m+n)(m+n-1)d} \\ &= \frac{2a_1(m-n) + (m^2 - m - n^2 + n)d}{(m+n)(2a_1 + (m+n-1)d)} \\ &= \frac{2a_1(m-n) + [(m-n)(m+n) - (m-n)]d}{(m+n)(2a_1 + (m+n-1)d)} \\ &= \frac{(m-n)(2a_1 + (m+n-1)d)}{(m+n)(2a_1 + (m+n-1)d)} \\ &= \frac{m-n}{m+n}. \end{aligned}$$

2)