

Zadatak 20. Ako za neki aritmetički niz vrijedi $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$, dokaži da je onda $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

Rješenje.

Prema uvjetima zadatka imamo

$$\frac{(2a_1 + (m-1)d)m}{(2a_1 + (n-1)d)n} = \frac{m^2}{n^2},$$

$$(2a_1 + (m-1)d)n = (2a_1 + (n-1)d)m$$

$$(2a_1 + (m-1)d)n - (2a_1 + (n-1)d)m = 0$$

$$2a_1(n-m) + (mn - n - mn + m)d = 0$$

$$(n-m)(2a_1 - 1)d = 0;$$

Kako je $m \neq n$ (inače je tvrdnja besmislena), stoga se dobiva $a_1 = d/2$. Tako je onda

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1 + (m-1)d}{a_1 + (n-1)d} = \frac{\frac{d}{2} + (m-1)d}{\frac{d}{2} + (n-1)d} = \frac{1 + 2(m-1)}{1 + 2(n-1)} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$