

Zadatak 23. Skup prirodnih brojeva razdijeljen je u skupine na sljedeći način: (1) , $(2, 4)$, $(3, 5, 7)$, $(6, 8, 10, 12)$, $(9, 11, 13, 15, 17)$, ... Objasni princip razvrstavanja. Koliki je zbroj brojeva u n -toj grupi?

Rješenje. U n -toj grupi se nalazni n prirodnih bojeva, parnih ako je n paran inače neparnih.

Uzmimo za prve članove najveće brojeve u grupi:

$$(a_1)_1 = 1, (a_1)_2 = 4, (a_1)_3 = 7, (a_1)_4 = 12, (a_1)_5 = 17, (a_1)_6 = 24, \dots$$

Svi ovi brojevi, da bi imali zajedničku formulu za zbroj, trebali bi zadovoljavati istu jednadžbu:

$$(a_1)_i = xn^2 + yn + z, \quad x, y, z \in \mathbf{R};$$

odnosno mora vrijediti:

$$n = 2 \implies 4 = 4x + 2y + z;$$

$$n = 3 \implies 7 = 9x + 3y + z;$$

$$n = 4 \implies 12 = 16x + 4y + z;$$

Oduzmemo li prvu jednadžbu od druge i drugu od treće dobijemo:

$$3 = 5x + y;$$

$$5 = 7x + y;$$

odkud imamo:

$$2 = 2x \implies \underline{x = 1};$$

$$3 = 5 + y \implies \underline{y = -2};$$

$$4 = 4 - 4 + z \implies \underline{z = 4};$$

te je prvi član n -te grupe dan formulom

$$(a_1)_n = n^2 - 2n + 4.$$

Provjerimo dali to vrijedi za $(a_1)_5$:

$$25 - 10 + 4 = 19$$

$$n = 2 \implies 2 = 4x + 2y + z;$$

$$n = 3 \implies 3 = 9x + 3y + z;$$

$$n = 4 \implies 6 = 16x + 4y + z;$$

Oduzmemo li prvu jednadžbu od druge i drugu od treće dobijemo:

$$1 = 5x + y;$$

$$3 = 7x + y;$$

odkud imamo:

$$2 = 2x \implies \underline{x = 1};$$

$$1 = 5 + y \implies \underline{y = -4};$$

$$2 = 4 - 8 + z \implies \underline{z = 6};$$

te je prvi član n -te grupe dan formulom

$$(a_1)_n = n^2 - 4n + 6.$$

Provjerimo dali to vrijedi za $(a_1)_5$:

$$25 - 20 + 6 = 11.$$

n -ta grupa se sastoji od n uzastopnih parnih ili neparnih brojeva. $S_n = (\frac{1}{2}n^2 + 1)n$.