

Zadatak 24.

Promotrimo niz skupova neparnih brojeva

$$\{1\}, \{3, 5\}, \{7, 9, 11\}, \{13, 15, 17, 19\}, \dots$$

Izračunaj zbroj svih brojeva u n -tom skupu.

Rješenje.

Primjećujemo da n -ta skupina ima n elemenata. Potražimo formulu za izračunavanje prvih članova pojedinih nizova. Pretpostavimo da $(a_1)_i$ oblika $xn^2 + yn + z$, $x, y, z \in \mathbf{R}$. Tada mora vrijediti:

$$1 = x + y + z;$$

$$3 = 4x + 2y + z;$$

$$7 = 9x + 3y + z.$$

Oduzmemmo li prvu jednadžbu od druge i drugu od treće dobijemo:

$$2 = 3x + y;$$

$$4 = 5x + y;$$

odakle slijedi

$$x = 1, \quad y = -1, \quad z = 1$$

dakle

$$(a_1)_n = n^2 - n + 1.$$

Uvrstimo li to u formulu za zbroj dobijemo:

$$S_n = \frac{n}{2} \left[2(n^2 - n + 1) + (n - 1) \cdot 2 \right] = \frac{n}{2} (2n^2 - 2n + 2 + 2n - 2) = n^3.$$