Zadatak 32. Ako su a, b, c i d uzastopni članovi geometrijskog niza, tada vrijedi:
1) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$;
2) $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$.
Dokaži!

Rješenje. U dokazu primijenjujemo sljedeće tri činjenice:

$$b^2=ac,\quad c^2=bd,\quad bc=ad.$$

Sada imamo:

1)

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)\\
&=a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^4+b^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+c^4+c^2d^2\\
&=a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+a^2c^2+a^2d^2+b^4+b^2d^2+b^2c^2+c^4\\
&\quad\{a^2c^2=acac=acb^2,\ a^2d^2=adad=adbc,\ b^2d^2=acd^2=adcd=bccd\\
&\qquad=bc^2d,\ b^2c^2=bcbc=adbc,\ c^4=c^2c^2=bdc^2\}\\
&=a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+ab^2c+abcd+ab^2c+bc^2d+abcd+bdc^2\\
&=a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+2ab^2c+2abcd+2ab^2c\\
&=(ab+bc+cd)^2;
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
&(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2\\
&=a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2+b^2-2bd+d^2\\
&=a^2-2ac+bd+ac-2bc+bd+ac-2bd+d^2\\
&=a^2-2bc+d^2=a^2-2ad+d^2=(a-d)^2.
\end{aligned}$$