Zadatak 35. Dokaži da je za svaki prirodni broj n

1) $1+2+2^2+\ldots+2^{5n-1}$ djeljiv s 31;

2) $1+3+3^2+\ldots+3^{6n-1}$ djeljiv s 364.

Rješenje. **1)** Dan je geometrijski niz koji ima $5n$ članova, prvi člna 1 i kvocijent 2 te imamo:

$$1+2+2^2+\ldots+2^{5n-1}=1\cdot\frac{2^{5n}-1}{2-1}=2^{5n}-1=32^n-1.$$

Sada dokaz provodimo indukcijom:

Za $n=1$ imamo: $32-1=31$ pa tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n i dokažimo je za $n+1$:

$$32^{n+1}-1=32\cdot 32^n-32+31=32(32^n-1)+31;$$

Po pretpostavci 31 dijeli $32(32^n-1)$ pa dijeli i dobiveni izraz. Time je tvrdnja dokazana.

2) Dan je geometrijski niz koji ima $6n$ članova, prvi člna 1 i kvocijent 3 te imamo:

$$1+3+3^2+\ldots+3^{6n-1}=1\cdot\frac{3^{6n}-1}{3-1}=\frac{729^n-1}{2}.$$

Sada dokaz provodimo indukcijom:

Za $n=1$ imamo: $\dfrac{729-1}{2}=364$ pa tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n i dokažimo je za $n+1$:

$$\frac{729^{n+1}-1}{2}=\frac{1}{2}(729\cdot 729^n-729+728)=729\cdot\frac{729^n-1}{2}+364;$$

Po pretpostavci 364 dijeli $\dfrac{729^n-1}{2}$ pa dijeli i dobiveni izraz. Time je tvrdnja dokazana.