

Zadatak 40. Ako je S_n zbroj prvih n članova geometrijskog niza, dokaži da je $(S_{2n} - S_n)^2 = S_n(S_{3n} - S_{2n})$.

Rješenje. $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, $S_{2n} = \frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q}$, $S_{3n} = \frac{a_1(1 - q^{3n})}{1 - q}$. Uvrštavajući, lako dokazujemo tvrdnju:

$$\begin{aligned}(S_{2n} - S_n)^2 &= \left(a_1 \frac{1 - q^{2n}}{1 - q} - a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)^2 \\ &= \frac{a_1^2}{(1 - q)^2} (q^n - q^{2n})^2 = \frac{a_1^2}{(1 - q)^2} q^{2n} (1 - q^n)^2 \\ &= \frac{a_1}{1 - q} (1 - q^n) \cdot \frac{a_1}{1 - q} q^{2n} (1 - q^n) \\ &= \frac{a_1}{1 - q} (q^n - 1) \cdot \frac{a_1}{1 - q} (q^{2n} - 1 - q^{3n} + 1) \\ &= \frac{a_1}{1 - q} (q^n - 1) \cdot \left(a_1 \frac{1 - q^{3n}}{1 - q} - a_1 \frac{1 - q^{2n}}{1 - q} \right) \\ &= S_n(S_{3n} - S_{2n}).\end{aligned}$$