Zadatak 49. Dokaži da svaki od sljedećih nizova ima limes i odredi ga:

1) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2 - a_{n-1}}$, za $n \geqslant 2$;

2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{2}{3 - a_{n-1}}$, za $n \geqslant 2$.

Rješenje. **1)** $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4},$

$a_4 = \frac{1}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{5}, \quad a_5 = \frac{1}{2 - \frac{4}{5}} = \frac{5}{6};$

Da se naslutiti da je $a_n = \frac{n}{n+1}$. Pretpostavimo da je to istina za a_n i provjerimo za a_{n+1}:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2n+2-n} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Sada je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1;$$

2) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}, \quad a_3 = \frac{2}{3 - \frac{4}{5}} = \frac{10}{11},$

$a_4 = \frac{2}{3 - \frac{10}{11}} = \frac{22}{23}, \quad a_5 = \frac{2}{3 - \frac{22}{23}} = \frac{46}{47};$

Da se naslutiti da je $a_n < 1$. Pretpostavimo da je to istina za a_n i provjerimo za a_{n+1}:

$$a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n} < 1; \quad (3 - a_n > 2 \text{ zbog } a_n < 1).$$

Limes je omeđen i monotono rastući

$$a_{n+1} > a_n \iff \frac{2}{3 - a_n} > a_n \iff \underbrace{(a_n - 1)}_{<0}\underbrace{(a_n - 2)}_{<0} > 0$$

pa ima limes. Neka je a traženi limes, tada vrijedi:

$$a = \frac{2}{3-a}, \quad (a-1)(a-2) = 0; \quad (a_n < 1) \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$