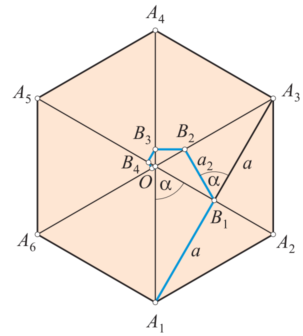
Zadatak 54. Vrhovi pravilnog mnogokuta $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ spojeni su s njegovim središtem dužinama $\overline{A_1O}, \overline{A_2O}, \overline{A_3O}, \ldots, \overline{A_nO}$. Iz A_1 na $\overline{A_2O}$ spuštena je okomica čija je duljina a. Iz nožišta B_1 te okomice spusti se okomica na OA_3 s nožištem B_2, iz B_2 okomica na A_4O s nožištem B_3 itd. Koliki je zbroj $|A_1B_1| + |B_1B_2| + |B_2B_3| + \ldots$ ako je $n = 6$; $n = 8$; $n = 12$?

Rješenje.



Iz slike se vidi $\triangle A_1B_1O \sim B_1A_3B_2$ (pravi kut, $\sphericalangle OA_1B_1 = \sphericalangle B_1A_3B_2 \Longrightarrow \alpha = \sphericalangle B_2B_1A_3$) pa je

$$a_2 = a\cos\alpha;$$

Analogno se dobije:

$$a_3 = a_2\cos\alpha;$$

$$a_4 = a_3\cos\alpha;$$

$$a_5 = a_4\cos\alpha;$$

Dobili smo geometrijski niz s prvim članom a i kvocijentom $\cos\alpha$ pa vrijedi

$$a + a_1 + a_2 + \ldots = \frac{a}{1-\cos\alpha}.$$

Za $n = 6$ je $\alpha = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ pa je

$$S = \frac{a}{1-\frac{1}{2}} = 2a.$$

Za $n = 8$ je $\alpha = \dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ pa je

$$S = \frac{a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = a(2+\sqrt{2}).$$

Za $n = 12$ je $\alpha = \dfrac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ pa je

$$S = \frac{a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2a(2+\sqrt{3}).$$