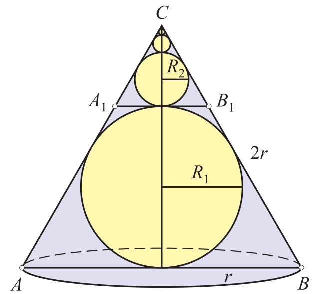
Zadatak 57. Jednakostraničnom stošcu polumjera osnovke r upisana je sfera. U prostor prema vrhu upisana je nova sfera koja dira prvu itd. Koliki je zbroj volumena i koliki je zbroj površina svih tih sfera?

Rješenje.



Polumjer sfere upisane stošcu je jednak polumjeru kružnice upisane jednakostraničnom trokutu ABC:

$$R_1 = \frac{2r\sqrt{3}}{6} = \frac{r\sqrt{3}}{3};$$

Iz sličnosti trokuta $\triangle ABC \sim A_1B_1C$ možmo izračunati koeficijent sličnosti među polumjerima upisanih sfera:

$$R_2 : R_1 = (v - 2R_1) : v$$

gdje je v visina stošca i jednaka je $v = r\sqrt{3}$ pa imamo:

$$R_2 : R_1 = (r\sqrt{3} - 2\frac{r\sqrt{3}}{3}) : r\sqrt{3} \implies R_2 : R_1 = \frac{1}{3}.$$

Analogno bi dobili $R_3 : R_2 = \frac{1}{3}$, $R_4 : R_3 = \frac{1}{3}$, ... pa polumjeri sfera čine geometrijski niz s kvocijentom $\frac{1}{3}$ iz čega zaključujemo da volumeni sfera čine geometrijski niz s kvocijentom $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, a površine geometrijski niz s kvocijentom $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{29}$.

$$V_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^3 \pi = \frac{4\sqrt{3}}{27} r^3 \pi;$$

$$P_1 = 4\left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 \pi = \frac{4}{3} r^2 \pi;$$

te je

$$V = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{27} r^3 \pi}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{2\sqrt{3}}{13} r^3 \pi;$$

$$P = \frac{\frac{4}{3} r^2 \pi}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9 \cdot 4}{3 \cdot 8} r^2 \pi = \frac{3}{2} r^2 \pi.$$