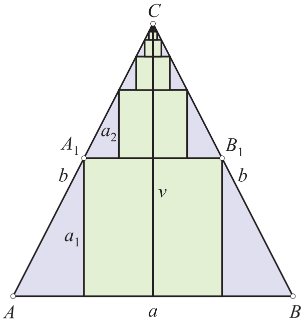
Zadatak 58. Pravilnoj četverostranoj piramidi kojoj su pobočke jednakostranični trokuti, svaki površine $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, upisana je kocka čija jedna strana leži u osnovici piramide, a vrhovi gornje osnovke na bridovima su piramide. Na gornju osnovku kocke uz jednake uvjete položena je prema vrhu piramide nova kocka i tako dalje. Koliki je zbroj volumena svih ovako konstruiranih kocaka?

Rješenje. Pogledamo li poprečni presjek vidimo da je kvadrat stranice a_1 (stranica kocke) upisan jednakokračnom trokutu čija je osnovica jednaka stranici baze piramide a krakovi jednaki visini jednakostraničnog trokuta koji je pobočka piramide.



Najprije izračunajmo podatke za jednakokračni trokut:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \implies a^2 = 36, \quad a = 6;$$

$$b = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3};$$

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 27 - 9 = 18 \implies v = 3\sqrt{2}.$$

Sada iz sličnosti trokuta ABC i A_1B_1C imamo:

$$a_1 : a = (v - a_1) : v$$

$$a_1 : 6 = (3\sqrt{2} - a_1) : 3\sqrt{2}$$

$$a_1\sqrt{2} = 6\sqrt{2} - 2a_1$$

$$a_1 = \frac{6\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{12 - 12\sqrt{2}}{2} = 6(\sqrt{2} - 1);$$

Kvocijent sličnosti među kvadratima je

$$q = a_2 : a_1 = a_1 : a = \sqrt{2} - 1;$$

te je među kockama

$$q^3 = (\sqrt{2} - 1)^3 = 5\sqrt{2} - 7.$$

Volumen prve kocke je

$$a_1^3 = (6(\sqrt{2} - 1))^3 = 216(5\sqrt{2} - 7);$$

a zbroj svih volumena

$$V_u = \frac{216(5\sqrt{2} - 7)}{8 - 5\sqrt{2}} \cdot \frac{8 + 5\sqrt{2}}{8 + 5\sqrt{2}} = \frac{216(5\sqrt{2} - 6)}{14} = \frac{108}{7}(5\sqrt{2} - 6)\,\text{cm}^3.$$